Vorlesung Geometrische Integrationstheorie, SS 13

Prof. Dr. M. Zähle

Übung:T. Bohl

Die Vorlesung baut auf den Grundkursen zur Analysis, linearen Algebra und analytischen Geometrie auf. Kenntnisse der allgemeinen Maßtheorie sind wünschenswert. Es wird eine geometrisch orientierte Maß-und Integrationstheorie in euklidischen Räumen präsentiert, die nicht an strenge Differenzierbarkeitsbedingungen gebunden ist, sich aber noch an klassischen Modellen orientiert. Sie ist im Zusammenhang mit der Lösung des Plateau-Problems in höherdimensionalen Räumen entstanden und erlaubt das Studium von geometrischen Mengen mit Singularitäten. Dabei entwickelte Grundprinzipien werden heute auch in der fraktalen Geometrie verwendet.
Parallel zur 4h-Vorlesung wird eine 2h-Übung angeboten. Das Modul kann in zwei Varianten, mit und ohne Übung, gewählt werden.

Inhalt (Maximalvariante)

1 Äußere Maße in metrischen Räumen

Wiederholung allgemeiner maßtheoretischer Grundbegriffe und Beziehungen, Verbindung mit Elementen der topologischen (vor allem der metrischen) Maßtheorie.
Ausgangspunkt sind äußere Maße.

1.1 Allgemeine (äußere) Maße

Äußere Maße und messbare Mengen, Maßraum, Einschränkung auf Teilmengen

1.2 Borel-Maße in metrischen Räumen und äußeres Lebesgue-Maß

Borel-σ-Algebra, Borel-Maße, Charakterisierung als metrische äußere Maße, äußeres Lebesgue-Maß als Beispiel, Borel-reguläres Maß und Approximation über offene und abgeschlossene Mengen

2 Hausdorff-Maße

Geometrische Eigenschaften von Hausdorff-Maßen als spezielle metrische äußere Maße, Einordnung in die Theorie der Überdeckungsmaße

2.1 Überdeckungsmaße

Coratheodory-Konstruktion in metrischen Räumen; sphärisches, Hausdorff- und Lebesgue-Maß als Beispiele

2.2 Eigenschaften von Hausdorff-Maßen

Einschränkung der Überdeckungssysteme, Zählmaß, Hausdorff-Dimension, Invarianzeigenschaft und Skalierung, Übereinstimmung von $\mathcal{L}^n$, $\mathcal{H}^n$, $\mathcal{H}^n_\delta$, $\mathcal{S}^n_\delta$, $\mathcal{S}^n$, Verhalten unter Hölder-stetigen Abbildungen

3 Transformation von Hausdorff-Maßen auf rektifizierbaren Mengen in euklidischen Räumen

Verallgemeinerung des Transformationssatzes für Integrale bezüglich des Lebesgue-Maßes auf niederdimensionale Mengen mit Singularitäten

3.1 Klassische Formulierung des Hausdorffschen Flächensatzes und Anwendungen

Transformation des Lebesgue-Maßes unter linearen Abbildungen, Hausdorffscher Flächensatz für lineare Abbildungen als Folgerung, Flächensatz für differenzierbare Injektionen, Lebesguescher Transformationssatz als Spezialfall, Hausdorff-Maße auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$ in Parameterdarstellung, Flächensatz für differenzierbare Abbildungen

3.2 Beweise

über lokale Linealisierung bei injektivem Differential und Vernachlässigung von singulären Werten (Satz von Sard) im Allgemeinfall

3.3 Ausdehnung auf eine Klasse rektifizierbarer Mengen

Ausgangsraum $\mathbb{R}^n$ wird ersetzt durch gewisse $\mathcal{H}^n$- rektifizierbare Mengen im $\mathbb{R}^d$, Flächensatz 3.3.1 liefert grundlegende Transformationsregel bei der Integration von Differentialformen (Kapitel 5)

4 Hilfsmittel aus der multilinearen Algebra

Lineare algebraische Strukturen, die zur Integration von Differentialformen benötigt werden

4.1 Die alternierende Algebra über einem Vektorraum

alternierende n-Linearformen, äußeres Produkt und Eigenschaften, Transformation unter linearen Abbildungen des Vektorraumes (Zurückholen)

4.2 Die äußere Algebra über einem euklidischen Vektorraum

n-Vektoren werden wie n-Linearformen eingeführt, wobei der endlichdimensionale Vektorraum durch seinen dualen ersetzt wird, Skalarprodukt im Raum der n-Vektoren über dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ (analog für n-Linearformen über $\mathbb{R}^d$), geometrische Interpretation von einfachen n-Vektoren als Äquivalenzklassen von gleichorientierten Parallelepipeden mit gleichem aufgespannten Unterraum und gleichem Volumen, Transformation von Multivektoren unter linearen Abbildungen

4.3 Duale Paarung von n-Vektoren und alternierenden n-Formen

Wirkung der Form auf die Repräsentanten des Multivektors, geometrische Deutung

5 Integration von Differentialformen

Verallgemeinerung der Integration von Funktionen über $\mathcal{H}^n$-Mengen, Abbildungen dürfen zusätzlich von den Tangentialräumen der Punkte abhängen, Elemente der Vektoranalysis auf Kettenkomplexen

5.1 Multivektorfelder und Differentialformen im $\mathbb{R}^d$

Abbildungen von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ in den Raum der n-Vektoren bzw. der alternierenden n-Linearformen (mit verschiedenen Differenzierbarkeiten), Zurückholen einer Differentialform

5.2 Integration von Diffentialformen über $\mathcal{H}^n$-Mengen

Orientierung einer $\mathcal{H}^n$-Menge, Integralbegriff, Parameterdarstellung über ein Kartengebiet einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit, allgemeine Transformationsformel beim Übergang von einer $\mathcal{H}^n$-Menge zu einer anderen (vgl. 3.3)

5.3 Der Satz von Stokes für den Einheitswürfel

Herleitung über den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung (Leibnitz-Regel)

5.4 Äußere Differentiation von Differentialformen

Motivation anhand der speziellen Variante in 5.3; charakteristischen Eigenschaften der äußeren Differentiation; grad, div und rot als relevante Beispiele, äußeres Differential und Zurückholen

5.5 Der Satz von Stokes für Ketten

Zurückführen auf den Spezialfall des Würfels mit Hilfe der Transformationsformel aus 5.2

5.6 Die klassischen Integralsätze der Vektoranalysis

als Spezialfälle des Satzes von Stokes, Anwendungsbeispiele in der Theorie elektromagnetischer Felder

5.7 Anwendungen in der harmonischen Analysis

Greensche Formeln und Anwendung auf harmonische Funktionen

5.8 Der Hodge-Operator

Eigenschaften und Darstellung der Greenschen Formeln

Literatur

(wird noch ergänzt)

zur allgemeinen Maßtheorie:

1. Bauer: *Maß– und Integrationstheorie*, de Gruyter 1990.
2. Elstrodt: *Maß– und Integrationsthorie*, Springer 1996.

zur geometrischen Maß- und Integrationstheorie:

1. Falconer: *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press 1986.
2. Federer: *Geometric Measure Theory*, Springer 1969 (1997).
3. Krantz and Parks: *Geometric Integration Theory*, Birkhäuser 2008.
4. Mattila: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press 1995.
5. Rogers: *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press 1998.